

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”****Ediția a XXVII-a****ETAPA NAȚIONALĂ – 17 mai 2025****Clasa a IX-a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică****BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE****Subiectul 1.**Fie familia de funcții $f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_m(x) = mx^2 + 2(m+1)x + m + 2$, unde $m \in \mathbb{R}^*$.

- a) Arătați că pentru orice $m \in \mathbb{R}^*$, parabola asociată funcției f_m intersectează axa OX în două puncte distincte.
- b) Arătați că vârfurile parabolilor asociate funcțiilor f_m se găsesc pe dreapta de ecuație $y = x + 1$.
- c) Dacă A și B sunt punctele de intersecție ale graficului funcției f_m cu axa OX , determinați $m \in \mathbb{R}^*$ astfel încât lungimea segmentului AB să fie egală cu 10.

SOLUȚIE:

- a) Fie $m \in \mathbb{R}^*$. $G_{f_m} \cap OX: \begin{cases} y = f_m(x) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_m(x) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Rezolvăm ecuația $f_m(x) = 0 \Leftrightarrow mx^2 + 2(m+1)x + m + 2 = 0$. $\Delta = [2(m+1)]^2 - 4m(m+2) = 4$, pentru orice $m \in \mathbb{R}^*$1pDeoarece $\Delta = 4 > 0$, ecuația $f_m(x) = 0$ admite două rădăcini reale distincte x_1 și x_2 , iar $G_{f_m} \cap OX = \{A(x_1, 0), B(x_2, 0)\}$, pentru orice $m \in \mathbb{R}^*$1p

- b) Fie $V(x_V; y_V)$ vârful parabolei asociate funcției f_m , unde $m \in \mathbb{R}^*$.

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{2(m+1)}{2m} = -1 - \frac{1}{m}, y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4}{4m} = -\frac{1}{m}. \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$x_V = -1 + y_V \Rightarrow V(x_V; y_V) \text{ se află pe dreapta de ecuație } y = x + 1. \quad \dots\dots\dots 1p$$

- c) Rădăcinile ecuației $f_m(x) = 0, m \in \mathbb{R}^*$ sunt:

$$x_1 = \frac{-2(m+1) - \sqrt{4}}{2m} = \frac{-2m-4}{2m} = -1 - \frac{2}{m} \text{ și } x_2 = \frac{-2(m+1) + \sqrt{4}}{2m} = -1. \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$G_{f_m} \cap OX = \left\{ A\left(-1 - \frac{2}{m}, 0\right), B(-1, 0) \right\}. AB = |x_B - x_A| = \frac{2}{|m|}. \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$AB = 10 \text{ și } AB = \frac{2}{|m|} \Rightarrow \frac{2}{|m|} = 10 \Rightarrow |m| = \frac{1}{5} \Rightarrow m = -\frac{1}{5} \text{ sau } m = \frac{1}{5}, \text{ ambele valori fiind numere reale și nenule} \Rightarrow m \in \left\{ -\frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right\}. \quad \dots\dots\dots 1p$$

Subiectul 2.

- a) Știind că $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este o progresie aritmetică cu primul termen $a_1 \in \mathbb{R}$ și rația $r \in \mathbb{R}$, să se exprime suma următoare în funcție de a_1, r și n :

$$H = a_1 + (a_1 + a_2) + (a_1 + a_2 + a_3) + \dots + (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

- b) Fie numărul natural $x = \underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ cifre}} \underbrace{22 \dots 2}_{n \text{ cifre}}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că x este produsul a două numere naturale consecutive.

SOLUȚIE:

- a) Fie $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$.

$$H = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n, \text{ iar } S_n = \frac{[2a_1 + (n-1)r] \cdot n}{2}, n \in \mathbb{N}^*. \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$H = a_1 + \frac{(2a_1+1 \cdot r) \cdot 2}{2} + \frac{(2a_1+2 \cdot r) \cdot 3}{2} + \dots + \frac{[2a_1+(n-1)r] \cdot n}{2}.$$

$$H = \frac{(2a_1)(1+2+3+\dots+n)}{2} + \frac{[1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n] \cdot r}{2}. \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$H = a_1 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{3} \cdot \frac{r}{2} = \frac{n \cdot (n+1)}{6} \cdot [3a_1 + (n-1) \cdot r]. \quad \dots\dots\dots 1p$$

b) $x = \underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ cifre}} \underbrace{22 \dots 2}_{n \text{ cifre}} = 2 + 2 \cdot 10 + \dots + 2 \cdot 10^{n-1} + 10^n + 10^{n+1} + \dots + 10^{2n-1} \dots 1p$

$$x = 2(1 + 10 + \dots + 10^{n-1}) + 10^n(1 + 10 + \dots + 10^{n-1}) = (1 + 10 + \dots + 10^{n-1}) \cdot (2 + 10^n)$$

$$x = \frac{10^n - 1}{9} \cdot \frac{10^n + 2}{1} \dots 1p$$

$$x = \frac{(10^n - 1)}{9} \cdot \frac{(10^n + 2)}{1} = \frac{3(10^n - 1)}{9} \cdot \frac{(10^n + 2)}{3}$$

Observăm că $\underbrace{33 \dots 3}_{n \text{ cifre}} = \frac{3(10^n - 1)}{9} \dots 1p$

$$\underbrace{33 \dots 3}_n \cdot 4 = \frac{3(10^n - 1)}{9} + 1 = \frac{(10^n + 2)}{3}. \text{ Deci } x = \underbrace{33 \dots 3}_n \cdot \underbrace{33 \dots 3}_{n-1} \cdot 4 \dots 1p$$

Subiectul 3.

Unui angajat al unei firme de autoturisme i se acordă, pe lângă salariul de bază de 5000 lei pe lună, un comision din vânzări după cum urmează: dacă reușește să vândă până la 20 de mașini (inclusiv) i se dă un comision de 300 lei pentru fiecare mașină vândută, dacă depășește norma de 20 de mașini vândute, atunci comisionul va fi 400 de lei pentru fiecare vânzare peste norma stabilită.

- Determinați care este funcția pe baza căreia se calculează salariul lunar al angajatului.
- Cât primește angajatul dacă într-o lună reușește să vândă 10 mașini?
- Câte mașini trebuie să vândă angajatul pentru ca venitul său lunar să fie de 13000 lei?

SOLUȚIE:

- $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = \begin{cases} 5000 + 300n, & \text{dacă } n \leq 20 \\ 5000 + 20 \cdot 300 + (n - 20) \cdot 400, & \text{dacă } n > 20 \end{cases}$
 $n =$ numărul mașinilor vândute într-o lună, $f(n) =$ suma primită în luna în care a vândut n mașini.2p
 $f(n) = \begin{cases} 5000 + 300n, & \text{dacă } n \leq 20 \\ 3000 + 400n, & \text{dacă } n > 20 \end{cases} \dots 1p$
- $n = 10 \Rightarrow f(10) = 5000 + 3000 = 8000. \dots 1p$
- Dacă $n \leq 20 \Rightarrow 300n \leq 6000 \Rightarrow 300n + 5000 \leq 11000 \Rightarrow f(n) \leq 11000$.
 Dacă numărul mașinilor vândute este mai mic sau egal cu 20, atunci nu este posibil să obțină un venit lunar de 13000 de lei.1p
 Dacă $n > 20 \Rightarrow f(n) = 3000 + 400 \cdot n$.
 $f(n) = 13000 \Rightarrow 3000 + 400 \cdot n = 13000 \Rightarrow 400 \cdot n = 10000 \Rightarrow 4n = 100 \Rightarrow n = 25 \dots 2p$

Subiectul 4.

Considerăm un punct M în interiorul unghiului $\angle XOY$ de măsură α . Fie A proiecția punctului M pe semidreapta (OX) , iar B proiecția punctului M pe semidreapta (OY) .

- Arătați că $AB = OM \cdot \sin \alpha$.
- Să se demonstreze că unghiul $\angle XOY$ este ascuțit dacă și numai dacă $AB^2 < OA^2 + OB^2$.

SOLUȚIE:

- Fie P mijlocul segmentului $[OM]$
 $MA \perp OX, A \in OX \Rightarrow$ în $\triangle OAM, m(\hat{A}) = 90^\circ$ punctele $O, A, M \in C(P, \frac{OM}{2})$ (1)
 $MB \perp OY, B \in OY \Rightarrow$ în $\triangle OBM, m(\hat{B}) = 90^\circ$ punctele $O, B, M \in C(P, \frac{OM}{2})$ (2)1p
 Din (1) și (2) $\Rightarrow O, A, B, M \in C(P, \frac{OM}{2}) \Rightarrow$ în patrulaterul convex $OAMB$:
 $m(\hat{O}) + m(\hat{A}) + m(\hat{M}) + m(\hat{B}) = 360^\circ \Rightarrow m(\hat{M}) = 180^\circ - \alpha \dots 1p$
 Aplicând teorema sinusurilor în $\triangle ABM$ obținem $\frac{AB}{\sin M} = 2 \cdot \frac{OM}{2} \Rightarrow \frac{AB}{\sin(180^\circ - \alpha)} = OM \dots 1p$
 Finalizarea $AB = OM \cdot \sin \alpha \dots 1p$
- Aplicăm teorema cosinusului în $\triangle AOB \Rightarrow \cos \widehat{AOB} = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB} \dots 1p$
 $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ) \Leftrightarrow \cos \alpha > 0 \dots 1p$
 $\cos \alpha > 0 \Leftrightarrow OA^2 + OB^2 - AB^2 > 0 \Leftrightarrow AB^2 < OA^2 + OB^2 \dots 1p$

Notă: Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.